

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
 Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică



SUBIECTUL I

(30 puncte)

5p	<p>1. $z = \frac{1}{1+3i} + \frac{1}{1-3i} = \frac{1-3i}{1^2+3^2} + \frac{1+3i}{1^2+3^2} = \frac{(1-3i)+(1+3i)}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$</p> <p>$\bar{z} = \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \Rightarrow 3z + 2\bar{z} + i = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + i = 1 + i \Rightarrow 3z + 2\bar{z} + i = 1 + i = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$</p>	<p>2 p</p> <p>3p</p>
5p	<p>2. $G_f \cap OX = \{A, B\} \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 1 - 4m > 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$</p> <p>$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m}}{2}$</p> <p>$AB = x_1 - x_2 = \sqrt{1 - 4m}$</p> <p>$AB = 3 \Rightarrow \sqrt{1 - 4m} = 3 \Rightarrow 1 - 4m = 9 \Rightarrow m = -2$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
5p	<p>3. C.E. $2^{-x+1} - 2 > 0 \Rightarrow 2^{-x+1} > 2 \Rightarrow -x + 1 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$.</p> <p>$2^{-x+1} - 2 = 2^{x+2}$. Notăm 2^x cu $t, t > 0$. Ecuația devine $\frac{2}{t} - 2 = 4t \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0$</p> <p>cu $t_1 = -1$ (F) pentru că $t > 0$ și $t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$ (A) pentru că $x \in (-\infty, 0)$.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
5p	<p>4. $\sqrt{x} < 5 \Rightarrow x < 25 \Rightarrow A = \{0, 1, \dots, 24\} \Rightarrow$ avem 25 de cazuri posibile.</p> <p>Numerele naturale mai mici decât 25, prime cu 25 sunt 1, 2, ..., 24;</p> <p>mai puțin 5, 10, 15, 20.</p> <p>Avem $24 - 4 = 20$ cazuri favorabile.</p> <p>Probabilitatea = $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
5p	<p>5. $\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (x_B - 0)\vec{i} + (y_B - 3)\vec{j} = -2\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow B(-2, -1)$</p> <p>$\vec{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} = (x_C - 0)\vec{i} + (y_C - 3)\vec{j} = 2\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow C(2, -1)$</p> <p>$y_B = y_C = -1 \Rightarrow BC \parallel O_x; A(0, 3) \Rightarrow A \in O_y \Rightarrow AO \perp BC$</p> <p>$BO \perp AC \Rightarrow m_{BO} \cdot m_{AC} = -1 \Leftrightarrow \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} \cdot \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = -1 \Leftrightarrow \frac{-1}{-2} \cdot \frac{3-1}{0-2} = -1$ (A)</p> <p>Din $AO \perp BC$ și $BO \perp AC$ se deduce că O este ortocentrul triunghiului ABC.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
5p	<p>6. $tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4} + tgx}{1 - tg\frac{\pi}{4}tgx} = \frac{1 + tgx}{1 - tgx}$</p> <p>$tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{tg\frac{\pi}{4} - tgx}{1 + tg\frac{\pi}{4}tgx} = \frac{1 - tgx}{1 + tgx} \Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right)tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 + tgx}{1 - tgx} \cdot \frac{1 - tgx}{1 + tgx} = 1$.</p> <p>$1 < tg\frac{\pi}{4} + tgx \Leftrightarrow 1 < 1 + tgx \Leftrightarrow tgx > 0$ (A), pentru $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$.</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

5p	<p>1.a) $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A(2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$</p> <p>$\Rightarrow A(0) - A(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det[A(0) - A(2)] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$</p>	3p
-----------	---	-----------

	$A(-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A(-2) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 4 + 2 - 1 - 4 = 0$	2p
5p	<p>b) $\det A(m) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 1 - 2m - m - 1 - 4 = -3m - 6 = -3(m + 2)$</p> <p>Pentru $m + 2 \neq 0 \Rightarrow \det A(m) \neq 0 \Rightarrow$ sistemul este compatibil determinat</p> <p>Pentru $m + 2 = 0$ se arată că $\text{rang } A(m) = 2 = \overline{\text{rang } A(m)} \Rightarrow$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat \Rightarrow Sistemul este compatibil, $\forall m \in \mathbb{R}$.</p>	2p 3p
5p	<p>c) Rezolvăm sistemul $\begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ mx + y - 2z = -m \end{cases} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow z = -x$.</p> <p>Avem relațiile:</p> <p>$mx + 2x = -m - 2$</p> <p>$x(m + 2) = -(m + 2)$</p> <p>Pentru $m + 2 \neq 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (-1, 2, 1)$, care nu verifică relația.</p> <p>Pentru $m + 2 = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (-\alpha, 2, \alpha) = 2, \alpha \in \mathbb{R}$.</p> <p>Pentru $m = -2$ avem $x^{2024} + z^{2024} = y^{2025} \Rightarrow 2 \cdot \alpha^{2024} = 2^{2025} \Rightarrow \alpha^{2024} = 2^{2024} \Rightarrow \alpha = \pm 2 \Rightarrow$ Soluțiile cerute sunt $(-2, 2, 2)$ și $(2, 2, -2)$</p>	3p 2p
5p	<p>2. a) $1 \circ 1 = \ln(e^1 + e^1) = \ln(2e) = \ln 2 + \ln e = \ln 2 + 1$</p> <p>$2 < e \Rightarrow \ln 2 < \ln e \Rightarrow 1 + \ln 2 < 1 + \ln e = 2 \Rightarrow 1 \circ 1 < 2$</p>	3p 2p
5p	<p>b) $x \circ y = \ln(e^x + e^y) = \ln(e^y + e^x) = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ legea este comutativă</p> <p>$(x \circ y) \circ z = \ln(e^{x \circ y} + e^z) = \ln(e^{\ln(e^x + e^y)} + e^z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$</p> <p>$x \circ (y \circ z) = \ln(e^x + e^{y \circ z}) = \ln(e^x + e^{\ln(e^y + e^z)}) = \ln(e^x + e^y + e^z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$</p> <p>$\Rightarrow$ legea este asociativă.</p>	2p 3p
5p	<p>c) $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}} = \ln(e^x + e^x + \dots + e^x) = \ln(n \cdot e^x) = \ln e^x + \ln n = x + \ln n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.</p> <p>Ecuția devine: $x + \ln n = x^n + \ln n \Leftrightarrow x = x^n; n \in \mathbb{N}^*$.</p> <p>Pt. $n = 1 \Rightarrow x = x$ cu soluția orice $x \in \mathbb{R}$</p> <p>Pt. $n \geq 2$ și $n = \text{par}, x = x^n \Rightarrow x(x^{n-1} - 1) = 0$ cu soluțiile reale $x_1 = 0, x_2 = 1$</p> <p>Pt. $n \geq 2; n = \text{impar}, x = x^n \Rightarrow x(x^{n-1} - 1) = 0$ cu soluțiile reale $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$</p>	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea
(30 puncte)

5p	<p>1. a) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x+1}, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ \frac{e^x}{x+1}, & x \in [0, \infty) \end{cases}$</p> <p>$f$ e continuă pe $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ fiind compunere de funcții elementare</p> <p>$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{x+1} = 1$</p> <p>$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x+1} = 1$</p> <p>$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0) \Rightarrow f$ este continuă și în $x_0 = 0$</p>	2p 3p
----	---	----------

Scoala in Papuci

