Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Fie $z = \frac{1}{1+3i} + \frac{1}{1-3i}$. Calculați modulul numărului complex $3z + 2\bar{z} + i$.

5p **2.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + m, m \in \mathbb{R}$. Determinați m știind că graficul funcției intersectează axa Ox în punctele distincte A și B, cu distanța AB = 3.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $log_2(2^{-x+1} - 2) = x + 2$.

5p **4.** Fie $A = \{x \in N / \sqrt{x} < 5\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din A, acesta să fie prim cu 25.

5p **5.** Fie $A(0,3)$ si punctele B, C astfel încât $\overrightarrow{AB} = -2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$. Arătați că ortocentrul triunghiului ABC este punctul $O(0,0)$.

5p **6.** Arătați că $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră sistemul: $\begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ mx + y - 2z = -m \end{cases}$ și $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că det [A(0) – A(2)] = det A(-2).

5p **b)** Arătați că sistemul este compatibil pentru orice număr real *m*.

5p **c)** Determinați soluțiile (x, y, z) ale sistemului, care verifică relația: $x^{2024} + z^{2024} = y^{2025}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție: $x \circ y = \ln(e^x + e^y)$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 1 < 2$.

5p **b)** Verificați dacă legea "$\circ$" este comutativă și asociativă.

5p **c)** Rezolvați în R ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}} = x^{\text{n}} + \ln\, n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x+1}$

5p **a)** Arătați că *f* este o funcție continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p **b)** Arătați că *f* nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

5p **c)** Determinați $m \in \mathbb{R}$ asttfel încât ecuația *f*(*x*) = *m* să aibă cel puțin o soluție reală.

2. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$, unde F este o primitivă pentru funcția f.

5p **a)** Determinați funcția f si calculați $\int \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x)dx$

5p **b)** Calculați $\int \frac{F(x)}{x^2+1} dx$

5p **c)** Arătați că orice primitivă a lui F este o funcție strict crescătoare care are un singur punct de inflexiune.