Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evalure și de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $z_1 = 1+i$ soluție a ecuației $\Rightarrow (1+i)^2 + a(1+i) + 1 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-1-2i}{1+i}$ $\lvert a\rvert = \left\lvert \dfrac{-1-2i}{1+i} \right\rvert = \dfrac{\lvert -1-2i\rvert}{\lvert 1+i\rvert} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$	**3p** **2p**
5p	**2.** $V(x_V, y_V) \Rightarrow d(V, Ox) = \lvert y_V\rvert$ $\lvert y_V\rvert = \left\lvert -\dfrac{\Delta}{4a} \right\rvert \Rightarrow \left\lvert -\dfrac{4-4m}{4} \right\rvert = 1 \Rightarrow m \in \{0, 2\}$	**2p** **3p**
5p	**3.** $\log_3^2 x + \log_3 9 + \log_3 x = 4$. Notăm $\log_3 x = t \Rightarrow t^2 + t = 2$ $\Rightarrow t_1 = 1;\ t_2 = -2 \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = \dfrac{1}{9}$, care convin.	**2p** **3p**
5p	**4.** Alegem 2 numere impare din cele 5 numere impare în $C_5^2 = 10$ moduri Alegem un număr par din cele 5 numere pare în 5 moduri Sunt 50 de submulțimi	**2p** **1p** **2p**
5p	**5.** $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$ și $y = -1$. Avem $d_1 \cap d_2 = \{A(1;-1)\}$. Atunci, dacă $A \in d_3 \Rightarrow 1 - 1 + a = 0 \Rightarrow a = 0$.	**3p** **2p**
5p	**6.** $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghic în $A \Rightarrow R = \dfrac{BC}{2} = 10$. $P_{\Delta ABC} = 48$ și $A_{\Delta ABC} = \dfrac{12 \cdot 16}{2} = 96 \Rightarrow r = \dfrac{96}{24} = 4$. $\dfrac{r}{R} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $A(-1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A(-1,0))^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Suma elementelor $3+1+1+2+2+1+0+0+1 = 11 \in \mathbf{N}$	**3p** **2p**
5p	**b)** Matricea $A(m,-1)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m,-1)) \neq 0$ $A(m,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(m,-1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = 2(1-m^2)$ $\det(A(m,-1)) \neq 0 \Rightarrow 2(1-m^2) \neq 0 \Rightarrow m \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$	**1p** **2p** **2p**
5p	**c)** $B_1(1,1), B_n(n,n^2), B_m(m,m^2), A_{\Delta B_1 B_n B_m} = \dfrac{\lvert\Delta\rvert}{2}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n & n^2 & 1 \\ m & m^2 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)(n-1)(m-n)$	**1p**

	$m,n\in\mathbf{Z}\setminus\{1\},\ m\neq n\Rightarrow\Delta\in\mathbf{Z}^*$ Dacă m şi n au aceeaşi paritate $\Rightarrow m-n$ este par $\Rightarrow\Delta$ este par Dacă m şi n au parităţi diferite $\Rightarrow m-1$ şi $n-1$ au parităţi diferite $\Rightarrow\Delta$ este par $\Rightarrow\lvert\Delta\rvert\,\vdots\,2\Rightarrow A_{\Delta B_1B_nB_m}=\dfrac{\lvert\Delta\rvert}{2}\in\mathbf{N}$	2p 2p
5p	**2. a)** $1\circ5=\dfrac{1^2\cdot5+1\cdot5^2}{1+1\cdot5}=$ $1\circ5=\dfrac{30}{6}=5$	2p 3p
5p	**b)** $x\circ1=\dfrac{x^2\cdot1+x\cdot1^2}{1+x\cdot1}=\dfrac{x\cdot(x+1)}{1+x}=x,\ \forall x\in M$ $1\circ x=\dfrac{1^2\cdot x+1\cdot x^2}{1+1\cdot x}=\dfrac{x\cdot(1+x)}{1+x}=x,\ \forall x\in M$ Deci, $e=1$ este elementul neutru al legii de compoziţie "$\circ$".	2p 2p 1p
5p	**c)** $\dfrac{1}{a}\circ\dfrac{1}{b}=\dfrac{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\dfrac{a+b}{ab\cdot(ab+1)}$; $\dfrac{1}{81}\cdot(a\circ b)=\dfrac{1}{81}\cdot\dfrac{ab\cdot(a+b)}{1+ab}$, $\forall a,b\in\mathbf{N}^*$ $a^2\cdot b^2=81$ şi, cum a şi b sunt numere naturale nenule, cu $a\leq b$, obţinem perechile $(1;9)$ şi $(3;3)$.	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f\,'(x)=\dfrac{x'\cdot\sqrt{x^2+2x+2}-x\cdot\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^2}=\dfrac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\cdot\sqrt{x^2+2x+2}},\ x\in\mathbf{R}$ $f\,'(x)<0,\forall x\in(-\infty,-2)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\left(-\infty,-2\right)$	3p 2p
5p	**b)** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{3x+1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}}\right)^{\frac{-2x-2}{x^2+2x+2}\cdot\frac{3x+1}{2}}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(-2x-2)\cdot(3x+1)}{2\cdot(x^2+2x+2)}}=e^{-3}$.	1p 2p 2p
5p	**c)** $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g(x)=f(x)-m$ este continuă şi derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi $g'(x)=f\,'(x),\forall x\in\mathbf{R}$, deci g este strict descrescătoare pe $(-\infty,-2)$ şi strict crescătoare pe $\left(-2,\infty\right)$. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1-m>0$; $g(-2)=-\sqrt{2}-m<0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1-m>0$, pentru orice $m\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuaţia $f(x)=m$ are exact două soluţii reale distincte.	2p 3p
5p	**2.a)** $\int f(x)\cdot e^{x^2}dx=\int e^{-x^2}\cdot\left(x^2+2024x+1\right)\cdot e^{x^2}dx=\int\left(x^2+2024x+1\right)dx=$ $\int x^2dx+\int2024xdx+\int dx=\dfrac{x^3}{3}+2024\dfrac{x^2}{2}+x+C=\dfrac{x^3}{3}+1012x^2+x+C$	2p 3p
5p	**b)** F derivabilă pe $\mathbf{R}$ şi $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbf{R}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{F(0)-F(-2x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F'(x)}{2F'(-2x)}=$	1p 2p

	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2f(-2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}\cdot\left(x^2+mx+1\right)}{2e^{-4x^2}\cdot\left(4x^2-2mx+1\right)}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
5p	**c)** Fie $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, o primitivă a funcției f $\Rightarrow G$ derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $G^{'}(x)=f(x),\forall x\in\mathbf{R}$ Dacă $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow G^{'}(x)\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow G$ crescătoare pe $\mathbf{R}$ Cum $e^{-x^2}>0,\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow e^{-x^2}\cdot\left(x^2+mx+1\right)\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow x^2+mx+1\geq 0,\forall x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$ $a>0$ și $\Delta\leq 0\Rightarrow m^2-4\leq 0\Rightarrow m\in\left[-2,2\right]$	**1p** **1p** **3p**