Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, decembrie 2024
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Fie ecuația $z^2+az+1=0,\ a\in\mathbf{C}$. Știind că $z_1=1+i$ este soluție a ecuației, determinați modulul lui a.

5p **2.** Determinați $m\in\mathbf{R}$ știind că distanța de la vârful parabolei de ecuație $y=x^2-2x+m$ la axa Ox este egală cu 1.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3^2 x+\log_3 9x=4$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,...,10\}$. Determinați numărul de submulțimi cu 3 elemente ale mulțimii A, submulțimi care conțin exact două numere impare.

5p **5.** Se consideră dreptele de ecuații $d_1:2x+3y+1=0$, $d_2:3x+y-2=0$ și $d_3:x+y+a=0$. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ pentru care cele trei drepte sunt concurente.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=12$, $AC=16$ și $BC=20$. Arătați că $\frac{r}{R}=\frac{2}{5}$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A(m,n)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m^2 & n^2\\ 1 & m & n\end{pmatrix}$ unde m și n sunt numere reale.

5p **a)** Să se arate că suma elementelor matricei $\left(A(-1,0)\right)^2$ este un număr natural.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care matricea $A(m,-1)$ este inversabilă.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $B_k\left(k,k^2\right), k\in\mathbf{Z}$. Să se arate că aria triunghiului determinat de punctele B_1, B_n, B_m este un număr natural, unde $m,n\in\mathbf{Z}\setminus\{1\}$, $m\neq n$.

2. Pe mulțimea $M=[0;\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{x^2\cdot y+x\cdot y^2}{1+x\cdot y}$

5p **a)** Arătați că $1\circ 5=5$.

5p **b)** Arătați că $e=1$ este element neutru al legii de compoziție "$\circ$".

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numere naturale nenule, cu $a\leq b$ pentru care $\frac{1}{a}\circ\frac{1}{b}=\frac{1}{81}\cdot(a\circ b)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,-2)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{3x+1}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real m, $m\in\left(-\sqrt{2};-1\right)$, ecuația $f(x)=m$ are exact două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=e^{-x^2}\left(x^2+mx+1\right)$, $m\in\mathbf{R}$ și $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, o primitivă a funcției f.

5p **a)** Pentru $m=2024$ calculați $\int f(x)\cdot e^{x^2}dx$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{F(0)-F(-2x)}$.

5p **c)** Determinați $m\in\mathbf{R}$ astfel încât orice primitivă a funcției f să fie crescătoare pe $\mathbf{R}$.