

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $(1 - i)^{2024}$ este real .
- 5p 2. Aflați $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $2x^2 - 5x - 3 < 0$.
- 5p 3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $5^x \cdot 2^{1-x} = 3^{x+1}$.
- 5p 4. Câte funcții $f: \{0,1,2,3,4\} \rightarrow \{0,1,2\}$ au proprietatea $f(1) \cdot f(2) = 0$?
- 5p 5. În sistemul cartezian de coordonate considerăm punctele $A(3,2), B(0,1), C(4, -3)$. Determinați ecuația înălțimii din A a triunghiului ABC .
- 5p 6. Fie a și b numere reale astfel încât $\sin a - \sin b = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ și $\cos a - \cos b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Demonstrați că $\cos(a - b) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

1. Se consideră mulțimea matricelor de forma $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbf{C}$.
- 5p a) Calculați $(A(2))^2 - 2^2 \cdot A(2)$;
- 5p b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy), \forall x, y \in \mathbf{C}$;
- 5p c) Determinați $a \in \mathbf{C}$ astfel încât $A(a) \cdot A(1) \cdot A(x) = A(x), \forall x \in \mathbf{C}$.
2. Pe mulțimea \mathbf{R} , se consideră legea de compoziție $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1$.
- 5p a) Aflați $k \in \mathbf{Z}$ astfel încât $x \circ y = 2(x+1)(y+1) + k, \forall x, y \in \mathbf{R}$;
- 5p b) Arătați că există $a \in \mathbf{Z}$ pentru care $x \circ a = a = a \circ x, \forall x \in \mathbf{R}$.
- 5p c) Rezolvați în \mathbf{R} ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \frac{1+x}{x}$
- 5p a) Să se arate că $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$
- 5p b) Determinați asimptotele graficului funcției f .
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (-f'(1) - f'(2) - \dots - f'(n))^n$
2. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (ax^2 + x + a)e^x, a \in \mathbf{R}$, iar $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o primitivă a funcției f .
- 5p a) Pentru $a = 0$ determinați numerele reale m și n știind că $F_0: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, F_0(x) = (mx + n)e^x$ este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Aflați valoarea lui a pentru care $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x^2 - 4} = -\frac{3}{4}e^2$.
- 5p c) Determinați valorile lui a știind că funcția F este crescătoare.