

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

Scoala in Papuci

SUBIECTUL I

(30 puncte)

5p	$S = x_1 + x_2 = 4, P = x_1 \cdot x_2 = 1$ $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0.$	2p 3p
5p	$7 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{6} + 1)^2$ Numărul va fi: $ \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6} = 1 \in \mathbb{N}$	2p 3p
5p	$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ Cu soluțiile: $3^x = 3$ și $3^x = -1$, care nu convine Finalizare: $x = 1$	2p 3p
5p	4. Mulțimea este $M = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$, deci 11 cazuri posibile $x = \text{pătrat perfect și } x \in M \Rightarrow x \in \{1, 4, 9\} \Rightarrow P = \frac{3}{11}$	2p 3p
5p	5. $m_d = 4$ și $d' \parallel d \Rightarrow m_{d'} = m_d = 4$ Finalizare, $d': y = 4x - 8$	2p 3p
5p	6. $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos x < 0$ $\cos x = -\frac{4}{5}$ și $\sin 2x = -\frac{24}{25}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

5p	1. a) $A^2 = -A$ $A^2 + A = -A + A = O_2$	3p 2p
5p	b) $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + aA + bA - abA$ $X(a) \cdot X(b) = I_2 + (a + b - ab)A = X(a + b - ab) \in M$	3p 2p
5p	c) $X(1) + X(2) + \dots + X(2024) = I_2 + 1 \cdot A + I_2 + 2 \cdot A + \dots + I_2 + 2024 \cdot A$ $= \underbrace{(I_2 + \dots + I_2)}_{\text{de 2024 ori}} + (1 + 2 + \dots + 2024) \cdot A = 2024I_2 + 1012 \cdot 2025 \cdot A$ $= 1012(2 \cdot I_2 + 2025 \cdot A)$ și finalizare: $m = 2$ și $n = 2025$	2p 3p
5p	2. a) $x * y = x(y - 3) - 3(y - 3) + 3$ Finalizare	3p 2p
5p	b) Un exemplu: $a = \frac{11}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ și $b = \frac{9}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a * b = 4 \in \mathbb{Z}$	3p 2p
5p	c) $x * 3 = 3 * y = 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\sqrt{1} * \sqrt{2} * \dots * \sqrt{9} * \dots * \sqrt{2024} = 3$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

5p	1. a) $f'(x) = \frac{e^{x(x-2)}}{x^3}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -e$	2p 3p
5p	b) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup [2, \infty)$ și $f'(x) < 0, \forall x \in (0, 2)$ f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0) \cup [2, \infty)$ și este strict descrescătoare pe $(0, 2)$, iar $x = 2$ este punct de minim local al lui f	3p 2p
5p	c) f este strict crescătoare pe $(2, \infty) \Rightarrow f(2023) < f(2024)$, $\frac{e^{\sqrt{2023}}}{2023} < \frac{e^{\sqrt{2024}}}{2024} \Leftrightarrow 2023 \cdot e^{\sqrt{2024}} > 2024 \cdot e^{\sqrt{2023}}$	2p 3p

5p	3. a) $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este primitivă a lui f dacă F este derivabilă pe $(0, \infty)$ și $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$	2p
	$F'(x) = f(x) = \frac{2}{x} + 3x + e^x > 0, \forall x \in (0, \infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(0, \infty)$	3p
5p	b) Fie $F(x) = 2 \ln x + \frac{3x^2}{2} + e^x + c, c \in \mathbb{R}$, o primitivă a lui f	2p
	$F(1) = 5 \Rightarrow c = \frac{7-2e}{2}$, iar $F(x) = 2 \ln x + \frac{3x^2}{2} + e^x + \frac{7-2e}{2}$.	3p
5p	c) $\int \frac{f(x)-e^x}{x} dx = \int \frac{2+3x^2}{x^2} dx$	2p
	$= 3x - \frac{2}{x} + C$	3p

Scoala in Papuci