

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

## SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi  $b_1, 6, b_3, 24, \dots$ .
- 5p 2. Știind că  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $x^2 - 2025x + 1 = 0$ , să se calculeze  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ .
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x = 6(\sqrt{x-2} - 1)$ .
- 5p 4. Să se determine  $n \in \mathbb{N}^*$  pentru care mulțimea  $\{1, 2, \dots, n\}$  are exact 120 de submulțimi cu două elemente.
- 5p 5. În sistemul cartezian de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $B(-1, 2)$  și  $C(2, -2)$ . Să se determine distanța de la punctul  $O$  la dreapta  $BC$ .
- 5p 6. Fie  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\sin x = \frac{1}{2} + \cos x$ . Să se calculeze  $\sin 2x$ .

Școala în Papuci

## SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

- 5p 1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  și  $B(a) = \begin{pmatrix} 16^a & 0 \\ 0 & 9^a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(B(a)) = 12^{2a}$ , pentru orice număr real  $a$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $A \cdot B(a) = B(a) \cdot A$ .
- 5p c) Demonstrați că pentru orice matrice  $X \in M_2(\mathbb{R})$  cu proprietatea că  $X \cdot X = B(1)$ , suma pătratelor elementelor matricei  $X$  este egală cu 25.
- 5p 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = 2^{x+y+2}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 5p a) Arătați că  $(-2025) * 2023 = 1$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(3 - 4x) * (x^2 - 6) = 16$ .
- 5p c) Arătați că, dacă  $(x * y) * z = 2^{z+6}$ , atunci  $x = -y$ .

## SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

- 5p 1. Considerăm funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - e \ln x$ .
- 5p a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- 5p b) Arătați că  $f(x) \geq 0$  oricare ar fi  $x > 0$ .
- 5p c) Deduceți inegalitatea  $e^x \geq x^e$ , oricare ar fi  $x > 0$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x$ .
- 5p a) Calculați  $\int (f(x)e^{-x} + e^x) dx$ .
- 5p b) Dacă  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o primitivă a funcției  $f$ , determinați punctele de extrem ale funcției  $F$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x^2 - 6x + 9)e^x$  este o primitivă a funcției  $f$ .