Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE SI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\Delta=-36<0 \Rightarrow$ soluțiile ecuației sunt $x_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{36}}{2}$	**3p**
	Observăm că $x_1=1+3i$ și $x_2=1-3i$, deci $1+3i$ este soluție a ecuației din enunț	**2p**
2.	$\Delta=m^2-16$	**2p**
	$G_f\cap Ox=\varnothing \Leftrightarrow$ ecuația $f(x)=0$ nu are soluții reale $\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow m\in(-4,4)$	**3p**
3.	$\left(\sqrt{2x^2-x+6}\right)^2=\left(x\sqrt{3}\right)^2$ de unde obținem $x^2+x-6=0$	**3p**
	$x^2+x-6=0\Rightarrow x\in\{-3,2\}$, din care $x=2$ convine.	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale cu trei cifre, deci numărul cazurilor posibile este 900	**2p**
	Numărul celor divizibile cu 9 este dat de numărul valorilor $n\in\mathbb{N}$ care au proprietatea că $100\le 9n\le 999 \Leftrightarrow 11,(1)\le n\le 111$, deci avem 100 de cazuri favorabile. Probabilitatea cerută este $\frac{100}{900}=\frac{1}{9}$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$	**3p**
	$\left\lvert\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right\rvert=\left\lvert 2\overrightarrow{AC}\right\rvert=2AC=2\sqrt{2}$	**2p**
6.	Aria triunghiului ABC este $S=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\frac{20\sqrt{3}}{4}=5\sqrt{3}$	**2p**
	$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A \Rightarrow BC=\sqrt{21}$ $S=\frac{BC\cdot h_A}{2}\Rightarrow h_A=\frac{2S}{BC}\Rightarrow h_A=\frac{10\sqrt{7}}{7}$	**3p**

SUBIECTUL II (30 de puncte)

1.a)	$\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3-2+2-1+1-12=-9$	**3p**

b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=3a^2-2+2-a+a-12=3\left(a^2-4\right)$	**2p**
	Sistemul de ecuații are soluții nenule dacă și numai dacă $\det\left(A(a)\right)=0$, de unde obținem $a\in\{-2,2\}$	**3p**
c)	Pentru $a=-2$, sistemul de ecuații devine $\begin{cases} -2x+2y+z=0 \\ 2x-2y+z=0 \\ x-y+3z=0 \end{cases}$ și are o infinitate de soluții de forma $(\alpha,\alpha,0)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$\alpha^2+2\alpha^2+3\cdot 0^2=6$ conduce la $\alpha=\pm\sqrt{2}$, deci $(x_0,y_0,z_0)\in\left\{\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right);\ \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0\right)\right\}$	**2p**
2.a)	Pentru orice $x\in G$ avem $x\circ\frac{1}{2}=\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1}=\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=x$	**2p**
	$\frac{1}{2}\circ x=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}-x+1}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot x}{\frac{1}{2}}=x$ deci $\frac{1}{2}\circ x=x\circ\frac{1}{2}=x$, pentru orice $x\in G$, adică $\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii „$\circ$”	**3p**
b)	$x\circ x'=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{xx'}{2xx'-x-x'+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2xx'=2xx'-x-x'+1\Leftrightarrow x'=1-x$	**2p**
	Observând că pentru orice $x\in(0,1)$ avem $1-x\in(0,1)$ și că legea „$\circ$” este comutativă, deducem că pentru orice $x\in G$, există $x'=1-x\in G$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=\frac{1}{2}$, adică toate elementele din G sunt simetrizabile	**3p**
c)	Pentru orice $x,y\in G$ avem $x\circ y=\dfrac{xy}{xy+(x-1)(y-1)}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)}$, de unde obținem $x\circ x=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}-1\right)^2}$ și $x\circ x\circ x=(x\circ x)\circ x=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x\circ x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}-1\right)^3}$	**3p**
	$x\circ x\circ x=0,(1)\Leftrightarrow\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}-1\right)^3}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}-1\right)^3=8\Leftrightarrow\frac{1}{x}-1=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\in G$	**2p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)'=\dfrac{(\ln x)'\cdot\ln(x+1)-\ln x\cdot\left(\ln(x+1)\right)'}{\ln^2(x+1)}==\dfrac{\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{\ln x}{x+1}}{\ln^2(x+1)}=$	**3p**
	$=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)-x\ln x}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$	**2p**

b)	Folosind regula lui L'Hospital, avem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	g este funcție biectivă $\Leftrightarrow$ funcția g este injectivă și surjectivă Considerăm funcția $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x$. Evident h este derivabilă și $h'(x)=1\cdot\ln(x+1)+(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1}-1\cdot\ln x-x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln(x+1)-\ln x>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci h este funcție strict crescătoare. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]}{=}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(-x)=0$, avem $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} h(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left((x+1)\ln(x+1)-x\ln x\right)=0$, prin urmare $h(x)>0$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$ Cum $x(x+1)\ln^2(x+1)>0,\ \forall x\in(0,+\infty)$, deducem că $f'(x)>0,\ \forall x\in(0,+\infty)$, prin urmare f este funcție strict crescătoare. Rezultă că f este funcție injectivă, deci funcția g este injectivă Deoarece funcția f este strict crescătoare și continuă, iar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ și $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\ln x\cdot\dfrac{1}{\ln(x+1)}\right)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$, deducem că $\mathrm{Im}(f)=(-\infty,1)$ Așadar, g este funcție surjectivă $\Leftrightarrow$ $B=\mathrm{Im}(f)$ $\Leftrightarrow$ $B=(-\infty,1)$	 **3p** **2p**
2.a)	Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ (este compusa a două funcții derivabile) $f'(x)=(\text{arctg }2x)'=\dfrac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{1+4x^2}=g(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	Dacă F este o primitivă a lui f , atunci F este derivabilă și $F'=f$, deci $F''=f'=g$ Așadar, funcția F este de două ori derivabilă și $F''(x)=\dfrac{2}{1+4x^2}>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, prin urmare funcția F este convexă	**2p** **3p**
c)	Integrând prin părți, avem succesiv $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 1\cdot\text{arctg}\,2x\,\mathrm{d}x=x\cdot\text{arctg}\,2x-\int x\cdot\dfrac{2}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x=x\cdot\text{arctg}\,2x-\dfrac{1}{4}\int\dfrac{8x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$, de unde obținem $\int f(x)\mathrm{d}x=x\cdot\text{arctg}\,2x-\dfrac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)+\mathcal{C}$ Rezultă $F(x)=x\cdot\text{arctg}\,2x-\dfrac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)+k$, unde $k\in\mathbb{R}$ $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{8}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}\ln2+k=\dfrac{\pi}{8}\Leftrightarrow k=\dfrac{\ln2}{4}$ Primitiva căutată este funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\cdot\text{arctg}\,2x-\dfrac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right)+\dfrac{\ln2}{4}$	 **3p** **2p**