

**Examenul național de bacalaureat 2025**
**Proba E. c)**
**Matematică  $M_{st-nat}$** 
**Model ianuarie 2025**
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**
**Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii**

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**
**(30 puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                 |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $\log_5 \frac{(4-\sqrt{6})^2 \cdot (4+\sqrt{6})^2}{4} =$ $= \log_5 \frac{(16-6)^2}{4} = \log_5 25 = 2$                                                                                                                                                                                     | <div style="border: 2px solid orange; border-radius: 10px; padding: 5px; display: inline-block; margin-bottom: 5px;"> <i>Scoala in Papuci</i> </div> <b>3p</b><br><br><b>2p</b> |
| 2. | $f(A) = \{f(x)   x \in A\}; f(-2) = -3; f(2) = 5;$<br>$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ vârful parabolei, $\frac{-b}{2a} = -1 \in A; a = 1 > 0, \min f = f(-1) = -4 \in f(A)$<br>$\Rightarrow f(A) = [-4, 5)$                                                              | <b>2p</b><br><br><b>3p</b>                                                                                                                                                      |
| 3. | Notăm $\log_2 x = t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0; t_1 = 2; t_2 = \frac{1}{2}$<br>$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$ și $\log_2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$ care convin                                                                                                        | <b>3p</b><br><br><b>2p</b>                                                                                                                                                      |
| 4. | Număr de cazuri posibile $2^5 = 32$<br>Cazurile favorabile sunt: submulțimile cu două elemente, în număr de $C_5^2 = 10$ , submulțimile cu un singur element, în număr de $C_5^1 = 5$ și submulțimea vidă. În total 16 cazuri favorabile. Probabilitatea $P = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ | <b>2p</b><br><br><b>3p</b>                                                                                                                                                      |
| 5. | Fie $O(0,0) \in d_1 \Rightarrow d(d_1, d_2) = d(O, d_2)$<br>Distanța dintre cele două drepte este $d(d_1, d_2) = \frac{ 6 \cdot x_0 - 8 \cdot y_0 - 5 }{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{1}{2}$                                                                                                | <b>2p</b><br><br><b>3p</b>                                                                                                                                                      |
| 6. | Pentru $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cos x < 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{3}{5}$<br>$tgx + ctgx = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{25}{12}$                                                                                                               | <b>3p</b><br><br><b>2p</b>                                                                                                                                                      |

**SUBIECTUL al II-lea**
**(30 puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                            |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| <b>1.a)</b> | $A(x) - I_2 = \begin{pmatrix} 3x & -2x \\ 6x & -4x \end{pmatrix}$ $\det(A(x) - I_2) = \begin{vmatrix} 3x & -2x \\ 6x & -4x \end{vmatrix} = 3x \cdot (-4x) - (-2x) \cdot 6x = -12x^2 + 12x^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>2p</b><br><br><b>3p</b> |
| <b>b)</b>   | $A(x) = I_2 + xA; A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}; A(y) = I_2 + yA; A(x+y-xy) = I_2 + (x+y-xy)A$ $A^2 = -A; A(x) \cdot A(y) = (I_2 + xA) \cdot (I_2 + yA) = I_2 + xA + yA + xyA^2 =$ $I_2 + xA + yA - xyA = I_2 + (x+y-xy)A = A(x+y-xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>2p</b><br><br><b>3p</b> |
| <b>c)</b>   | $A^2(x) + I_2 = A(2x - x^2) + I_2 = \begin{pmatrix} 2 + 3(2x - x^2) & -2(2x - x^2) \\ 6(2x - x^2) & 2 - 4(2x - x^2) \end{pmatrix}$ $\det(A^2(x) + I_2) = 4 - 2(2x - x^2) = 4 - 4x + 2x^2 = 2(x-1)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>2p</b><br><br><b>3p</b> |
| <b>2.a)</b> | $\frac{1}{2025} \circ \frac{1}{2025} = \frac{2024 \cdot \frac{1}{2025} \cdot \frac{1}{2025}}{2025 \cdot \frac{1}{2025} \cdot \frac{1}{2025} - \frac{1}{2025} - \frac{1}{2025} + 1} =$ $= \frac{2024}{2025^2} \cdot \frac{2025}{2024} = \frac{1}{2025}$ <div style="border: 2px solid orange; border-radius: 15px; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 10px;"> <i>Scoala in Papuci</i> </div>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>2p</b><br><br><b>3p</b> |
| <b>b)</b>   | $e \circ x = x \circ e \text{ adevărat pentru orice } x \in (0,1) \text{ în baza comutativității adunării și}$ $\text{înmulțirii numerelor reale; } x \circ e = x \Leftrightarrow \frac{2024xe}{2025xe - x - e + 1} = x \Leftrightarrow$ $2024e = 2025xe - x - e + 1 \Leftrightarrow (1-x)(2025e-1) = 0 \Rightarrow e = \frac{1}{2025} \in (0,1)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>2p</b><br><br><b>3p</b> |
| <b>c)</b>   | <p>Condiția de morfism <math>f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in (0, \infty); f(x \cdot y) = \frac{x \cdot y}{x \cdot y + 2024}</math></p> $f(x) \circ f(y) = \frac{x}{x+2024} \circ \frac{y}{y+2024} = \frac{2024xy}{2024xy + 2024^2} = \frac{xy}{xy + 2024} = f(xy) \quad (1)$ <p>(2) Injectivitatea: <math>\forall x_1, x_2 \in (0, \infty)</math> astfel încât <math>f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2;</math></p> $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1+2024} = \frac{x_2}{x_2+2024} \Leftrightarrow x_1x_2 + 2024x_1 = x_1x_2 + 2024x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ <p>(3) Surjectivitatea: <math>\forall y \in (0,1), \exists x \in (0, \infty)</math> astfel încât <math>f(x) = y;</math> Din <math>f(x) = y \Rightarrow</math></p> $\frac{x}{x+2024} = y \Leftrightarrow x - xy = 2024y \Leftrightarrow x = \frac{2024y}{1-y} \in (0, \infty), \forall y \in (0,1)$ <p>Din (1), (2) și (3) <math>f: (0, \infty) \rightarrow (0,1), f(x) = \frac{x}{x+2024}</math> este un izomorfism între grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive <math>((0, \infty), \cdot)</math> și grupul <math>(G, \circ)</math></p> | <b>2p</b><br><br><b>3p</b> |

**SUBIECTUL al III-lea**
**(30 puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                    |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| <b>1.a)</b> | $f'(x) = \left( e^{-3x+3} - \frac{9}{2}x^2 + 12x - \frac{17}{2} \right)' = (e^{-3x+3})' - \left( \frac{9}{2}x^2 \right)' + (12x)' - \left( \frac{17}{2} \right)' =$ $= (e^{-3x+3}) \cdot (-3) - \frac{9}{2} \cdot 2x + 12 \cdot 1 - 0 = -3 \cdot e^{-3x+3} - 9x + 12$                                                                                        | <b>2p</b><br><br><b>3p</b>         |
| <b>b)</b>   | $f(1) = 0$ și $f'(1) = 0$<br>ecuația tangentei $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 0 = 0 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = 0$                                                                                                                                                                                                                    | <b>2p</b><br><br><b>3p</b>         |
| <b>c)</b>   | $f''(x) = 9e^{-3x+3} - 9$ , $f''(1) = 0$<br>$f''(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 1]$ , deci $f$ este convexă $\forall x \leq 1$ și $f''(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este concavă $\forall x \geq 1 \Rightarrow f$ are un singur punct de inflexiune                                                                  | <b>2p</b><br><br><b>3p</b>         |
| <b>2.a)</b> | $f(x) = 2025 - 2025 \cdot x^{2024}$ , pentru orice $x \in (-\infty, 1)$ este continuă fiind o funcție elementară. $f(x) = \ln x$ , pentru orice $x \in (1, \infty)$ este continuă fiind o funcție elementară<br>$l_s(1) = l_d(1) = f(1) = 0 \Rightarrow f$ continuă în $x = 1$ . Din continuitatea funcției $f$ pe $R \Rightarrow f$ admite primitive pe $R$ | <b>2p</b><br><br><br><br><b>3p</b> |
| <b>b)</b>   | $f$ continuă pe $R$<br>$\int_0^e f(x) dx = \int_0^1 (2025 - 2025x^{2024}) dx + \int_1^e \ln x dx = \left( 2025x - x^{2025} \right) \Big _0^1 + \int_1^e (x' \ln x) dx =$ $= 2024 + x \ln x \Big _1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = 2024 + e - (e - 1) = 2025$                                                                                          | <b>3p</b><br><br><br><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $2025 \int_1^x f^{2024}(t) dt + \int_1^x f^{2025}(t) dt = 2025 \int_1^x f^{2024}(t) dt + \int_1^x \ln^{2025}(t) dt =$ $2025 \int_1^x f^{2024}(t) dt + t \ln^{2025} t \Big _1^x - 2025 \int_1^x f^{2024}(t) dt =$ $= t \ln^{2025} t \Big _1^x = x \ln^{2025} x = x f^{2025}(x)$                                                                               | <b>3p</b><br><br><br><br><b>2p</b> |

*Scoala in Papuci*