Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Februarie 2025
Proba E.c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare și de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p	**1.** $\log_{16}24=\dfrac{\log_3 24}{\log_3 16}=\dfrac{\log_3(3\cdot 2^3)}{\log_3 2^4}=$ $\dfrac{1+3\cdot\log_3 2}{4\cdot\log_3 2}=\dfrac{1+3a}{4a}$.	**3p** **2p**
5p	**2.** Din relațiile lui Viète obținem $x_1+x_2=-1$ și $x_1\cdot x_2=-1$ $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=-3\in\mathbf{Z}$.	**2p** **3p**
5p	**3.** $\lvert x+1\rvert\neq 0\Rightarrow x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$. $\lvert x+1\rvert=\begin{cases}x+1;\ x>-1\\-(x+1);\ x<-1\end{cases}$. Dacă $x\in(-1,\infty)\Rightarrow x+\dfrac{1}{x+1}=1$ și are soluția $x=0\in(-1,\infty)$. Dacă $x\in(-\infty,-1)\Rightarrow x-\dfrac{1}{x+1}=1\ \Rightarrow x_1=-\sqrt{2}\in(-\infty,-1)$ și $x_2=\sqrt{2}\notin(-\infty,-1)$ Deci, $x\in\{-\sqrt{2};0\}$.	**2p** **3p**
5p	**4.** Dezvoltarea are 41 termeni $\Rightarrow$ 41 cazuri posibile Termenul general al dezvoltării $\left(1+\sqrt{5}\right)^{40}$ este $T_{k+1}=C_{40}^{k}5^{\frac{k}{2}},k\in\{0,1,2,...,40\}$ $T_{k+1}=C_{40}^{k}5^{\frac{k}{2}}\in\mathbf{Q}\Rightarrow\dfrac{k}{2}\in\mathbf{Z}\Rightarrow k\in\{0,2,4,...,40\}\Rightarrow 21$ termeni raționali $\Rightarrow 41-21=20$ termeni iraționali $\Rightarrow 20$ cazuri favorabile ; $P=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{41}$	**1p** **2p** **2p**
5p	**5.** Unghiul determinat de cei doi vectori este obtuz $\Rightarrow\cos\left(\measuredangle\left(\vec{v},\vec{u}\right)\right)<0$ $\cos\left(\measuredangle\left(\vec{v},\vec{u}\right)\right)=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}}<0\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2<0\Rightarrow 2-6a<0\Rightarrow a\in\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$	**3p** **2p**
5p	**6.** $AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\widehat{C}\Rightarrow AB^2=76$ $m_c^2=\dfrac{2\left(AC^2+BC^2\right)-AB^2}{4}=\dfrac{2(100+36)-76}{4}=49\Rightarrow m_c=7$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&2a-1\\1&a-3&a\end{pmatrix}$; $\det A=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&2a-1\\1&a-3&a\end{vmatrix}=-(a-5)(a-1)$ Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow\det A\neq 0\Rightarrow a\neq 5$ și $a\neq 1$. Deci, dacă $a\in\mathbf{R}\setminus\{1;5\}\Rightarrow$ sistemul are soluție unică.	**3p** **2p**

5p	**b)** Pentru $a=1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+3y+z=1 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$; $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-2=1 \neq 0 \Rightarrow rangA=2$.	**2p**
	$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci $rang\,\overline{A}=2$. Rezultă că sistemul este compatibil nedeterminat.	
	Pentru $a=5 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+5z=1 \\ x+3y+9z=1 \\ x+2y+5z=9 \end{cases}$, care este un sistem incompatibil.	**2p**
	Deci, sistemul este compatibil nedeterminat pentru $a=1$.	**1p**
5p	**c)** Pentru $a=1 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+3y+z=1 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$; $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-2=1 \neq 0 \Rightarrow rangA=2$.	**2p**
	$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci $rang\,\overline{A}=2$. Rezultă că sistemul este compatibil nedeterminat.	
	$\begin{cases} x+2y=1-\alpha \\ x+3y=1-\alpha \end{cases} ;\alpha \in R \Rightarrow x_0=1-\alpha; y_0=0; z_0=\alpha; \alpha \in R$	**2p**
	$2x_0^{\,2}+3y_0^{\,2}-z_0^{\,2}=14 \Rightarrow 2(1-\alpha)^2-\alpha^2=14 \Rightarrow \alpha^2-4\alpha-12=0 \Rightarrow \alpha_1=6$ și $\alpha_2=-2$ Rezultă $(x_0, y_0, z_0) \in \{(-5,0,6);(3,0,-2)\}$	**1p**
5p	**2. a)** $x \circ 0 = \dfrac{7x+7\cdot 0}{7+x\cdot 0} = x$, $\forall x \in M$	**2p**
	$0 \circ x = \dfrac{7\cdot 0+7x}{7+0\cdot x} = x$, $\forall x \in M$	**2p**
	$\Rightarrow e=0 \in M$ este elementul neutru al legii de compoziție "$\circ$".	**1p**
5p	**b)** $f(x \circ y) = f\left(\dfrac{7x+7y}{7+xy}\right) = \dfrac{\sqrt{7}-\dfrac{7x+7y}{7+xy}}{\sqrt{7}+\dfrac{7x+7y}{7+xy}} = \dfrac{\sqrt{7}\left(xy-\sqrt{7}x-\sqrt{7}y+7\right)}{\sqrt{7}\left(xy+\sqrt{7}x+\sqrt{7}y+7\right)}$ $x, y \in M$.	**2p**
	$f(x)f(y) = \dfrac{\sqrt{7}-x}{\sqrt{7}+x}.\dfrac{\sqrt{7}-y}{\sqrt{7}+y} = \dfrac{xy-\sqrt{7}x-\sqrt{7}y+7}{xy+\sqrt{7}x+\sqrt{7}y+7}$ $x, y \in M$.	**2p**
	$\Rightarrow f(x \circ y) = f(x)f(y)$ pentru orice $x, y \in M$.	**1p**
5p	**c)** Cum $x \in M \Rightarrow f(x \circ x \circ x \circ x \circ x \circ x) = f\left(\dfrac{63\sqrt{7}}{65}\right) = \dfrac{1}{64}$	**1p**
	Legea "$\circ$" este asociativă $\Rightarrow f(x \circ x \circ x) = f((x \circ x) \circ x) = f(x \circ x)\cdot f(x) = f(x)\cdot f(x)\cdot f(x)$ $f(x \circ x \circ x \circ x \circ x \circ x) = f((x \circ x \circ x) \circ (x \circ x \circ x)) = f(x \circ x \circ x)\cdot f(x \circ x \circ x) = (f(x))^6$	**2p**
	$(f(x))^6 = \dfrac{1}{64} \Rightarrow f(x) = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{\sqrt{7}}{3} \in M$, $x_2 = 3\sqrt{7} \notin M$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

5p	**1. a)** $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbf{R}$	**3p**

	Ecuația tangentei la graficul funcției în $x_0=0$ este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=x$	**2p**
5p	**b)** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0,\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\in\mathbf{R}\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\mathbf{R}\Rightarrow f$ injectivă pe $\mathbf{R}$. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right)=-\infty$, f continuă pe $\mathbf{R}$ $\Rightarrow \operatorname{Im} f=\mathbf{R}\Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă	**2p** **3p**
5p	**c)** f continuă pe $\mathbf{R}$, f derivabilă pe $\mathbf{R}$ Pentru $x\in\mathbf{R}$ aplicăm teorema lui Lagrange pe $[x,x+1]\Rightarrow\exists c_x\in(x,x+1)$ astfel încât $\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f'(c_x)\Rightarrow$ $f(x+1)-f(x)=\frac{1}{\sqrt{(c_x)^2+1}}\le 1,\forall x\in\mathbf{R}$	**1p** **2p** **2p**
5p	**2.a)** $\int_0^1\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+(x^2)^2}dx=$ $=\frac{1}{2}arctg\,x^2\Big\|_0^1=\frac{\pi}{8}$	**2p** **3p**
5p	**b)** Deoarece $\frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^4}\le 1$ pentru $x\in[0,1]\Rightarrow$ $\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\le\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx\le\int_0^1 1dx\Rightarrow$ $arctgx\Big\|_0^1\le\int_0^1 f(x)dx\le x\Big\|_0^1$. Deci, $\frac{\pi}{4}\le\int_0^1 f(x)dx\le 1$.	**2p** **1p** **2p**
5p	**c)** $I=\int_0^1\frac{f(x)\cdot f''(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2}dx=\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'dx=\frac{f'(x)}{f(x)}\Big\|_0^1$ $f'(x)=-\frac{4x^3}{(1+x^4)^2};x\in[0,1]$ Deci, $I=-\frac{4x^3}{1+x^4}\Big\|_0^1=-2$	**3p** **1p** **1p**