

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică  
 Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

*Scoala in Papuci*

## SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Comparați numele  $a = 45^{\lg \sqrt{10}} - \sqrt[4]{2025}$  și  $b = 2025^{\lg \sqrt{0,1}} - \sqrt[4]{2025}^{-2}$ .
- 5p 2. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - x$  și  $g(x) = 2x - 1$ .  
Să se arate că funcția  $f \circ g$  este descrescătoare.
- 5p 3. Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$ .
- 5p 4. Fie mulțimea  $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . Să se determine numărul funcțiilor pare  $f: A \rightarrow A$
- 5p 5. Fie  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  puncte în plan, astfel încât  $\vec{AB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{BC} = \vec{i} - 2\vec{j}$ . Calculați lungimea vectorului  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}$ .
- 5p 6. Determinați  $x \in (-\pi, \pi)$  știind că  $\left(\sin \frac{\pi}{5} + \cos x\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{5} - \sin x\right)^2 = 2$ .

## SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

1. Fie matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p a) Verificați dacă matricea  $A$  admite ca inversă matricea  $\frac{1}{2}(A - I_3)$ .
- 5p b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\det(A + xI_3) = 0$ .
- 5p c) Demonstrați că  $A^n + A^{n+1} = 2^n(A + I_3)$ ,  $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x \circ y = 2xy - 6(x + y) + 21$ .
- 5p a) Arătați că legea de compoziție admite ca element neutru numărul  $\frac{7}{2}$ .
- 5p b) Determinați numerele reale nenule  $x$  pentru care  $x \circ \frac{1}{x} = 8$ .
- 5p c) Demonstrați că mulțimea  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  nu este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea de compoziție dată.

## SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}$
- 5p a) Să se arate că  $f'(x) = (x+1) \cdot \frac{1}{f(x)}$
- 5p b) Determinați punctul  $M(a, b)$  situat pe graficul funcției  $f$ , știind că tangenta la grafic în punctul  $M$  este paralelă cu dreapta de ecuație  $y = \sqrt{2}x$ ;
- 5p c) Arătați că funcția  $f$  este concavă pe intervalul  $(0, \infty)$ .
2. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2} + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 (x - f(\sqrt{x})) dx = 0,5 - e$ ;
- 5p b) Calculați  $\int_0^1 xf(x) dx$ ;
- 5p c) Demonstrați că are loc inegalitatea:  $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq \int_0^1 ((1+x)^{1+x} + 1) dx$