

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $a = (20 + \sqrt{45})^2 + (20 - \sqrt{45})^2 + 2 \cdot (20 + \sqrt{45}) \cdot (20 - \sqrt{45})$ este un pătrat perfect.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 19x + 90$. Calculați $f(0) \cdot f(1) \cdot \dots \cdot f(20)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9(2x^2 - 2) = \log_3(x + 1)$.
- 5p 4. Fie mulțimea $A = \{1; 2; 3; \dots; 50\}$. Care este probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea A , acesta să aibă restul împărțirii la 5 egal cu 4?
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(10; 2a)$, $B(-6; 3a)$. Aflați numărul a , real pozitiv, știind că segmentul AB are lungimea de 34.
- 5p 6. Arătați că $\sin^2(45^\circ) + \cos(120^\circ) = \sin(150^\circ) - \cos^2(45^\circ)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

Pe mulțimea $M = [0; \infty)$ definim legea de compoziție $x * y = \frac{x + y + 6}{x \cdot y + 1}$, $\forall x, y \in M$.

- 5p 1. Arătați că $1 * \frac{1}{2} = 5$.
- 5p 2. Arătați că legea de compoziție "*" este comutativă.
- 5p 3. Arătați că $n * x > \frac{1}{n}$, $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- 5p 4. Aflați numerele reale $x \in (0; \infty)$ dacă $x * \frac{1}{x} = 4$.
- 5p 5. Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 4$, $n * n < 1$.
- 5p 6. Determinați perechile de numere naturale $(p; q)$, $p \leq q$, dacă $p * q = 2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

Fie matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{R}$.

- 5p 1. Arătați că $\det(A) = -3$.
- 5p 2. Arătați că $B(1) + B(2) + \dots + B(10) = 10B\left(\frac{55}{10}\right)$.
- 5p 3. Arătați că $B(2) \cdot B(-2) = 5 \cdot I_2$.
- 5p 4. Aflați numerele reale x dacă $\det(B(2x) + x \cdot A) = \det(B(x))$.
- 5p 5. Determinați matricea $X \in M_2(\mathbf{R})$ dacă $B(3) \cdot X = I_2$.
- 5p 6. Determinați perechile de numere naturale $(m; n)$, $m < n$, dacă $\det(B(m) \cdot B(n)) = 5$.