Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, februarie 2025
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Calculați $2025^{\log_4 5 \cdot \log_5 2}$.

5p **2.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + 5$. Determinați valoarea numărului real a pentru care punctul $P(-1, 3)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Determinați suma soluțiilor întregi ale inecuației $x^2 - 4x - 5 \leq 0$.

5p **4.** Se consideră numărul rațional $\frac{23}{15} = 1, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$. Calculați suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2025}$.

5p **5.** Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC = 12$. Dacă M este mijlocul ipotenuzei, calculați $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$.

5p **6.** Demonstrați egalitatea: $\cos 35° + \cos 65° + \cos 90° + \cos 115° + \cos 145° = 0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(n, 2^n), n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Verificați dacă punctele O, A_0 *și* A_2 sunt coliniare.

5p **b)** Determinați ecuația dreptei $A_1 A_3$.

5p **c)** Arătați că aria triunghiului determinat de punctele A_n, A_{n+1} *și* A_{n+2} este mai mare sau egală cu 1, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea $G = (-1, 1)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{x+y}{1+xy}, \forall x, y \in G$.

5p **a)** Arătați că $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{3}{5}$.

5p **b)** Rezolvați în G ecuația $x * (2x) = \frac{5}{9}$.

5p **c)** Arătați că funcția $f: (-1,\ 1) \to (0, +\infty), f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ *și* $\left((0, +\infty),\cdot\right)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{x} - 3x$.

5p **a)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției în $x_0 = 1$.

5p **b)** Arătați că funcția este convexă pe $(0, +\infty)$.

5p **c)** Arătați că $-4 \leq f(x) + f(x^2) < 0, \forall\, x \in (0, 1]$.

2. Pentru orice număr natural nenul n se definesc funcțiile $f_n: [0, +\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{x+1}$ și $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

5p **a)** Calculați I_1.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f_n este crescătoare pe $[0, +\infty), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

5p **c)** Arătați că $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.