

**Examenul național de bacalaureat 2026**
**Proba E. c)**
**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$** 
*Model aprilie 2026*
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**
*Scoala in Papuci*
*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*
*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**
**(30 puncte)**

1.	$\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 3 \cdot (2 \log_3 2) = 2$ $(\sqrt{2})^2 = 2$ , deci numerele $\log_2 3, \sqrt{2}$ și $\log_3 4$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 4 - \sqrt{3}$ și $x_2 = 4 + \sqrt{3}$ , deci $f(4 + \sqrt{3}) = 0$ Atunci $f(\sqrt{3}) \cdot f(1 + \sqrt{3}) \cdot \dots \cdot f(4 + \sqrt{3}) \cdot f(5 + \sqrt{3}) = 0$	3p 2p
3.	$2 \cdot 5^x - \frac{5}{5^x} = -3 \Leftrightarrow 2 \cdot 5^{2x} + 3 \cdot 5^x - 5 = 0$ și notând $t = 5^x$ se obțin soluțiile $t_1 = 1$ care convine și $t_2 = -\frac{5}{2}$ care nu convine Deci $5^x = 1 \Rightarrow x = 0$	3p 2p
4.	Numărul submulțimilor cu 5 elemente ale mulțimii $A$ , care conțin exact 3 numere pare este egal cu $C_4^3 \cdot C_3^2 =$ $= \frac{4!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 4 \cdot 3 = 12$	3p 2p
5.	$\overline{BD} + \overline{CA} = \overline{CD} + \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{BD} - \overline{CD} = \overline{CD} - \overline{CA} \Leftrightarrow \overline{BD} + \overline{DC} = \overline{AC} + \overline{CD}$ $\overline{BC} = \overline{AD}$ , deci $ABCD$ este paralelogram	3p 2p
6.	$b = \frac{\pi}{6} - a$ , deci $2 \sin b = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - a\right) =$ $= 2 \left( \frac{1}{2} \cos a - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a \right) = \cos a - \sqrt{3} \sin a$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**
**(30 puncte)**

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	2p
------	---	----

	$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1$	<b>3p</b>
<b>b)</b>	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1+a & a & 0 \\ a & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+b & b & 0 \\ b & 1+b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1+a+b+ab+ab & b+ab+a+ab & 0 \\ a+ab+b+ab & ab+1+a+b+ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1+a+b+2ab & a+b+2ab & 0 \\ a+b+2ab & 1+a+b+2ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(a+b+2ab) \text{ pentru orice numere reale } a \text{ și } b$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>c)</b>	$A(a) \cdot A(b) = A(a+b+2ab) = A\left(2\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)$ $A(a) \cdot A(b) \cdot A(c) = A\left(2\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) \cdot A(c) = A\left(4\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(c+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right),$ <p>pentru orice <math>a, b, c</math> numere reale</p> $\Rightarrow 4\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(c+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)\left(c+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$ $(2a+1)(2b+1)(2c+1) = 1$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 7 =$ $= 1 - 6 + 12 - 7 = 0$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>b)</b>	$x_1 + x_2 + x_3 = 6; x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 12$ $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 12 =$ $= 36 - 24 - 24 + 12 = 0, \text{ deci } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 \text{ nu depinde de } m$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>c)</b>	<p>Dacă <math>(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 0</math> și <math>x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 2</math></p> $\Rightarrow f(X) = (X - 2)^3 = X^3 - 6X^2 + 12X - 8 \Rightarrow m = -8$	<b>3p</b>  <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**
**(30 puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = (x^2 - x - 1)' \cdot e^x + (x^2 - x - 1) \cdot (e^x)' =$ $= (2x - 1)e^x + (x^2 - x - 1)e^x = (x^2 + x - 2)e^x = (x - 1)(x + 2)e^x, x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ deci graficul funcției nu admite asimptotă spre } +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0, \text{ deci dreapta de ecuație } y = 0$ <p>este asimptotă orizontală spre <math>-\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p> <p><math>D_f = \mathbb{R}</math>, deci graficul funcției nu admite asimptote verticale, în concluzie graficul funcției <math>f</math> admite o singură asimptotă.</p>	<b>3p</b>  <b>2p</b>

<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)e^x = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ sau } x=-2;$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, f(-2) = \frac{5}{e^2}, f(1) = -e$ Cum funcția $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f$ este crescătoare pe $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ și descrescătoare pe $(-2, 1)$ , graficul funcției $f$ intersectează dreapta $y = a$ în exact trei puncte pentru $a \in \left(0, \frac{5}{e^2}\right)$	<b>3p</b>          <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$2I_1 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 4x + 3} dx = \int_0^1 \left( \frac{-1}{x+1} + \frac{3}{x+3} \right) dx =$ <div style="border: 2px solid green; border-radius: 15px; padding: 5px; display: inline-block; margin: 10px;"> <i>Scoala in Papuci</i> </div> $= -\ln(x+1) \Big _0^1 + 3\ln(x+3) \Big _0^1 = -\ln 2 + \ln 1 + 3\ln 4 - 3\ln 3 = \ln \frac{32}{27}$	<b>2p</b>          <b>3p</b>
<b>b)</b>	$I_{n+2} + 4I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2 + 4x + 3} dx + 4 \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2 + 4x + 3} dx + 3 \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 4x + 3} dx =$ $= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 4x^{n+1} + 3x^n}{x^2 + 4x + 3} dx = \int_0^1 \frac{x^n (x^2 + 4x + 3)}{x^2 + 4x + 3} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 = \frac{1}{n+1}$	<b>2p</b>          <b>3p</b>
<b>c)</b>	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{x^2 + 4x + 3} dx = \int_0^1 \frac{x^n (x-1)}{x^2 + 4x + 3} dx \leq 0$ pentru orice $x \in [0, 1] \Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$ , pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ , deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este descrescător $\frac{1}{n+1} = I_{n+2} + 4I_{n+1} + 3I_n \leq 8I_n \Rightarrow I_n \geq \frac{1}{8(n+1)}$ ; $\frac{1}{n+1} = I_{n+2} + 4I_{n+1} + 3I_n \geq 8I_{n+2} \Rightarrow$ $I_{n+2} \leq \frac{1}{8(n+1)} \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{8(n-1)}$ , deci $\frac{n}{8(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{n}{8(n-1)}$ și aplicând criteriul cleștelui obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{8}$	<b>2p</b>                      <b>3p</b>