

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I
(30 puncte)

- 5p 1. Determinați numărul complex z , știind că $3z + 4\bar{z} = 7 - i$.
- 5p 2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2 - 2x + m$ este situat pe dreapta de ecuație $2y - x = 3$.
- 5p 3. Arătați că dacă $\log_2(1 + 5\sqrt{x}) = 4$, atunci numărul $n = \log_5(3x - 2)$ este natural.
- 5p 4. Determinați al șaptelea termen al dezvoltării $\left(5x + \sqrt{\frac{5}{x}}\right)^n$ știind că termenul al treilea are coeficientul binomial egal cu 105.
- 5p 5. Calculați lungimea vectorului $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{DC} + \vec{AD}$, știind că $ABCD$ este un dreptunghi cu lungimile laturilor egale cu 6, respectiv 8.
- 5p 6. Arătați că $\sin^2 15^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 75^\circ = \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea
(30 puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3^a & 1 \\ 0 & 3^a \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1) + A(2)) = 144$.
- 5p b) Determinați $x \in R$ pentru care $A(x-1) + A(x+1) = 2A(2x-1)$.
- 5p c) Determinați perechile de numere naturale (x, y) care verifică ecuația $\det(A(2x) \cdot A(3y)) = \det(A(6))$.
2. Se consideră polinoamele $f, g \in R[X], g = X^3 + mX^2 + 31X + n$ cu y_1, y_2, y_3 rădăcini reale și $f = X^3 + X + a$ cu rădăcinile reale $x_1, x_2, x_3 \in R$, iar a, m și n sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că pentru orice număr real a , polinomul f nu are toate rădăcinile reale.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $x_1 + x_2 = -1$.
- 5p c) Pentru $a = -2$, determinați numerele reale m și n știind că $y_1 = 2x_1 - 3, y_2 = 2x_2 - 3$ și $y_3 = 2x_3 - 3$.

SUBIECTUL al III-lea
(30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow R, f(x) = \begin{cases} ax - 3, & x \in (0, 3) \\ \sqrt{x^2 - 3x}, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$, unde $a \in R^*$.
- 5p a) Determinați $a \in R^*$ știind că funcția f este continuă în $x = 3$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Pentru $a = 1$ determinați imaginea funcției f .

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \frac{1}{2}$.

5p b) Calculați $\int (f(x) + f(x+1) + \dots + f(x+2025)) dx$.

5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{x+1} f(t) dt}{f(x)}$.

Scoala in Papuci