

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I
(30 puncte)

- 5p 1) Determinați numerele raționale a și b , știind că $\frac{2}{\sqrt{27}-1} - \frac{1}{4+\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$.
- 5p 2) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + 7$, unde a este un număr real nenul. Determinați numărul real a știind că $(f \circ f)(x) = 3f(x) + 7$.
- 5p 3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4 \frac{\sqrt{5-x}}{2} = 2\sqrt{x^2-8x+11}$.
- 5p 4) Se consideră mulțimea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Determinați numărul de submulțimi cu patru elemente ale mulțimii A , care îl conțin pe b .
- 5p 5) În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $A(-2,1), B(1,3), D(0,-3)$. Determinați ecuația dreptei CD .
- 5p 6) Triunghiul ABC are aria egală cu $\sqrt{3}$, latura $AB=2$ și măsura unghiului A de 60° . Calculați lungimea laturii BC .

SUBIECTUL al II-lea
(30 puncte)

- 1) Se consideră matricea $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ a+2 & b-2 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(A(-5,5)) = 0$.
- 5p b) Demonstrați că matricea $A(a,b)$ este inversabilă pentru oricare $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{Q}$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(\sqrt{3},1) \cdot X = A(0,0)$.
- 2) Se consideră polinomul $f = 2X^3 - 4X^2 + 7X + a$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .
- 5p a) Pentru $a = 2$, determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X - 2$.
- 5p b) Determinați numărul real a , știind că $x_1 + x_2 = x_3$.
- 5p c) Pentru $a = -5$, descompuneți polinomul f în factori ireductibili peste $R[X]$.

SUBIECTUL al III-lea
(30 puncte)

- 1) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 5})$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}}, x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x)$.
- 5p c) Demonstrați că $2f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) < f(1)$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 1$.

5p a) Calculați $\int_1^2 f(x) dx$.

5p b) Demonstrați că $\int_{-1}^0 f(x) \cdot e^{(x^3-x)} dx = 0$.

5p c) Determinați numărul natural a pentru care $(a+1) \int_0^1 f^{2026}(x) dx = 2^{2026} - a \int_0^1 f^{2025}(x) dx$.

Scoala in Papuci